

# **EINI LogWing/WiMa/MP**

**Einführung in die Informatik für  
Naturwissenschaftler und Ingenieure**

**Vorlesung      2 SWS      WS 25/26**

Dr. Lars Hildebrand  
Fakultät für Informatik – Technische Universität Dortmund  
[lars.hildebrand@tu-dortmund.de](mailto:lars.hildebrand@tu-dortmund.de)  
<http://ls14-www.cs.tu-dortmund.de>

# Thema

## Kapitel 5

### Algorithmen und Datenstrukturen

- ▶ Konstruktion von Datentypen: Arrays
- ▶ Algorithmen: Sortieren

EINI LogWing /  
WiMa

## Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

## In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- Sortieren
- Rekursive  
Datenstrukturen

## Unterlagen

- ▶ Dißmann, Stefan und Ernst-Erich Doberkat: *Einführung in die objektorientierte Programmierung mit Java*, 2. Auflage. München [u.a.]: Oldenbourg, 2002, Kapitel 3.4 & 4.1.  
(→ ZB oder Volltext aus Uninetz)
- ▶ Echtle, Klaus und Michael Goedicke: *Lehrbuch der Programmierung mit Java*. Heidelberg: dpunkt-Verl, 2000, Kapitel 4. (→ ZB)
- ▶ Gumm, Heinz-Peter und Manfred Sommer: *Einführung in die Informatik*, 10. Auflage. München: De Gruyter, 2012, Kapitel 2.7 – 2.8. (→ Volltext aus Uninetz)

## Begriffe

- ✓ Spezifikationen, Algorithmen, formale Sprachen
- ✓ Programmiersprachenkonzepte
- ✓ Grundlagen der imperativen Programmierung

EINI LogWing /  
WiMa

## Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

- Algorithmen und Datenstrukturen
  - Felder
  - Sortieren
  - Rekursive Datenstrukturen (Baum, binärer Baum, Heap)
  - ▶ Heapsort
- ▶ Objektorientierung
  - ▶ Einführung
  - ▶ Vererbung
  - ▶ Anwendung

## In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- Sortieren
- Rekursive  
Datenstrukturen

# Gliederung

## ► Array

- ▶ Datenstruktur zur Abbildung gleichartiger Daten
- ▶ Deklaration
- ▶ Dimensionierung und Zuordnung von Speicher zur Laufzeit
- ▶ Zuweisung: ganzes Array, Werte einzelner Elemente

## ► Algorithmen auf Arrays: Beispiel Sortieren

- ▶ **naives Verfahren:** Minimum bestimmen, entfernen, Restmenge sortieren
- ▶ **Heapsort:** ähnlich, nur mit Binärbaum über Indexstruktur
- ▶ **Quicksort:** divide & conquer, zerlegen in zwei Teilmengen anhand eines Pivotelementes

EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

In diesem Kapitel:

- Prolog
- **Arrays**
- Sortieren
- Rekursive  
Datenstrukturen

## Motivation

Schleifen erlauben die Verarbeitung mehrerer Daten auf „einen Schlag“.

EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

In diesem Kapitel:

- Prolog
  - **Arrays**
  - Sortieren
  - Rekursive  
Datenstrukturen
- ▶ Entsprechend auf der Variablenseite ist die Zusammenfassung mehrerer Variablen gleichen Typs: **Arrays** oder **Felder**.
- ▶ Beispiele
  - ▶ Zeichenketten/Strings: Arrays aus Character/Zeichen
  - ▶ Vektoren, Matrizen: Arrays aus Integer/Float-Variablen
  - ▶ Abbildung eines Lagerbestandes durch Angabe der Menge für einen Artikel und einen Lagerort bei n unterschiedlichen Artikeln und m Orten:
    - Bestand [1] [5]: der Bestand des Artikels 1 am Ort 5
    - In Java: Bestand [i] [j]: Artikel mit Nummer i und Ort j

## In diesem Kapitel:

- Prolog
- **Arrays**
- Sortieren
- Rekursive  
Datenstrukturen

## ► Fragen

- ▶ Wie werden Arrays deklariert?
- ▶ Wie werden Daten in Arrays abgelegt, verändert und ausgegeben?
- ▶ Wie wird die Größe eines Arrays festgelegt?
- ▶ Warum müssen wir die Größe überhaupt festlegen?

# Arrays III

- ▶ **Arrays sind Variablen,**
  - ▶ sie müssen daher auch deklariert werden, bevor sie benutzt werden.
  - ▶ die viele Variablen enthalten, die vom gleichen Typ sind.
- ▶ Die Anzahl der Dimensionen entspricht der Anzahl der Indexausdrücke.
- ▶ Deklarationen

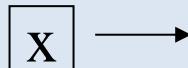
```
int[] x;           // ein-dimensional int  
double[][] y;    // zwei-dimensional double
```

- ▶ Sie legen allerdings (anders als bei `int z;`) noch keinen Speicherplatz fest.

# Arrays IV

Die Deklarationen einer Array-Variablen legt nur einen Verweis auf ein Array fest, die Dimensionierung muss extra erfolgen!

```
int[ ] x;
```



```
x = new int [15];
```



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

```
int[ ] x = {1,2,4,3};
```



0	1	2	3
1	2	4	3

**Die Deklarationen einer Array-Variablen legt nur einen Verweis auf ein Array fest, die Dimensionierung muss extra erfolgen!**

EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

- ▶ Dimensionierung mittels **new** (Schlüsselwort)
- ▶ **[anzahl]** gibt die Anzahl der Elemente an.
- ▶ Ist kein Inhalt angegeben, wird jedes Element mit 0 initialisiert.
- ❖ Beachte: Indizes **immer** 0 ... Anzahl -1

In diesem Kapitel:

- Prolog
- **Arrays**
- Sortieren
- Rekursive  
Datenstrukturen

# Zuweisungen

- ▶ Bei der Deklaration einer Array-Variablen werden die Standardwerte zugewiesen:
  - ▶ z.B.: int alles 0 ...
- ▶ Andere Variante
  - ▶ Belegung mit direkt angegebenen Konstanten

```
int [] m =  
{31,28,31,30,31,30,31,31,30,31,30,31};
```
  - ▶ Größe und Belegung sind direkt festgelegt:  
→ keine Erzeugung mittels **new** notwendig

EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

In diesem Kapitel:

- Prolog
- **Arrays**
- Sortieren
- Rekursive  
Datenstrukturen

# Zuweisung an Array-Variable

Array-Größe ist nach Ausführung des new-Operators fest!

- Veränderung der Größe nur durch Programm möglich

```
int [] a,b;  
a = new int [10];  
....           // Zuweisung an die Elemente 0 ..9  
  
b = new int [20];  
  
for (int i=0; i < 10; i++) b[i] = a[i];  
  
a = b;      // nun verweisen a und b auf das  
            // gleiche Array!
```

# Zuweisung an Array-Variablen: Beispiel 1

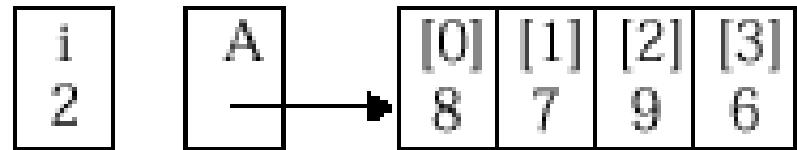
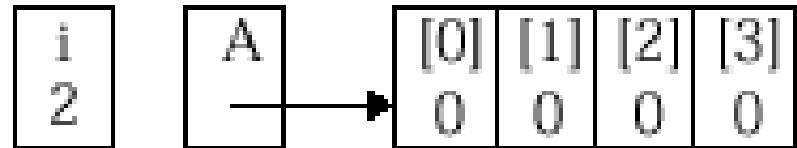
```
int i = 2;
```

```
int [] A;
```

```
A = new int [4];
```

```
A [0] = 8;    A [1] = 7;
```

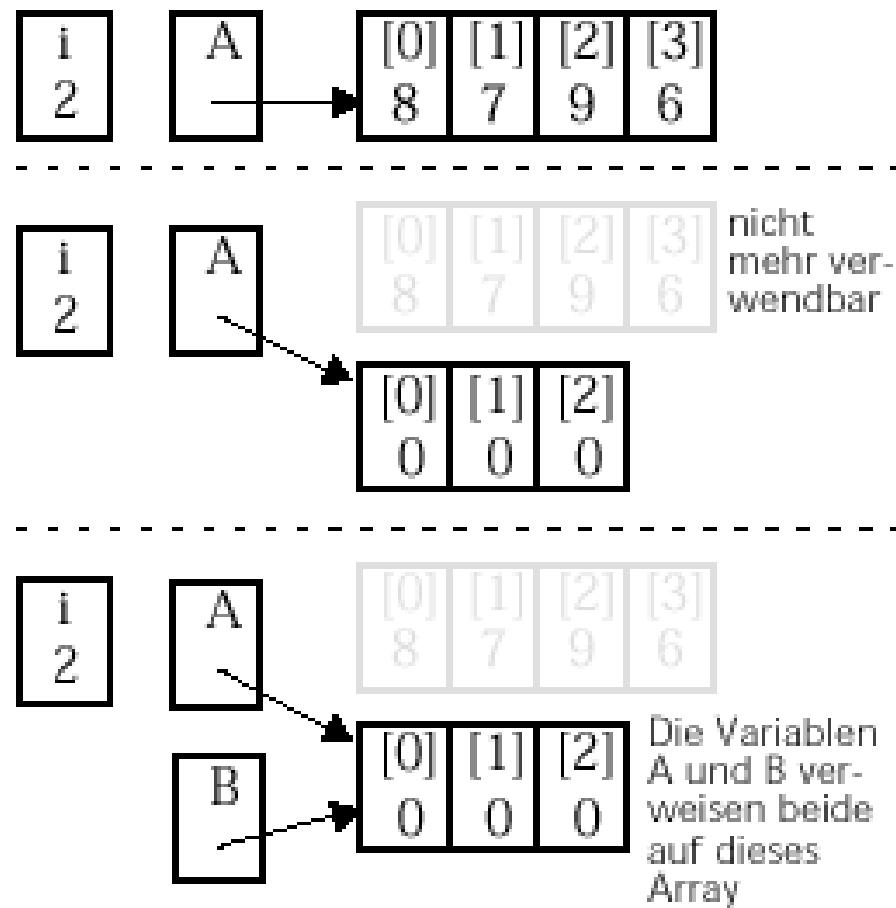
```
A [i] = 9;    A [3] = 6;
```



Echtle/Goedicke, Heidelberg: Abb. 2–19 (Ausschnitt), S. 73 © dpunkt 2000.

# Zuweisung an Array-Variablen: Beispiel 2

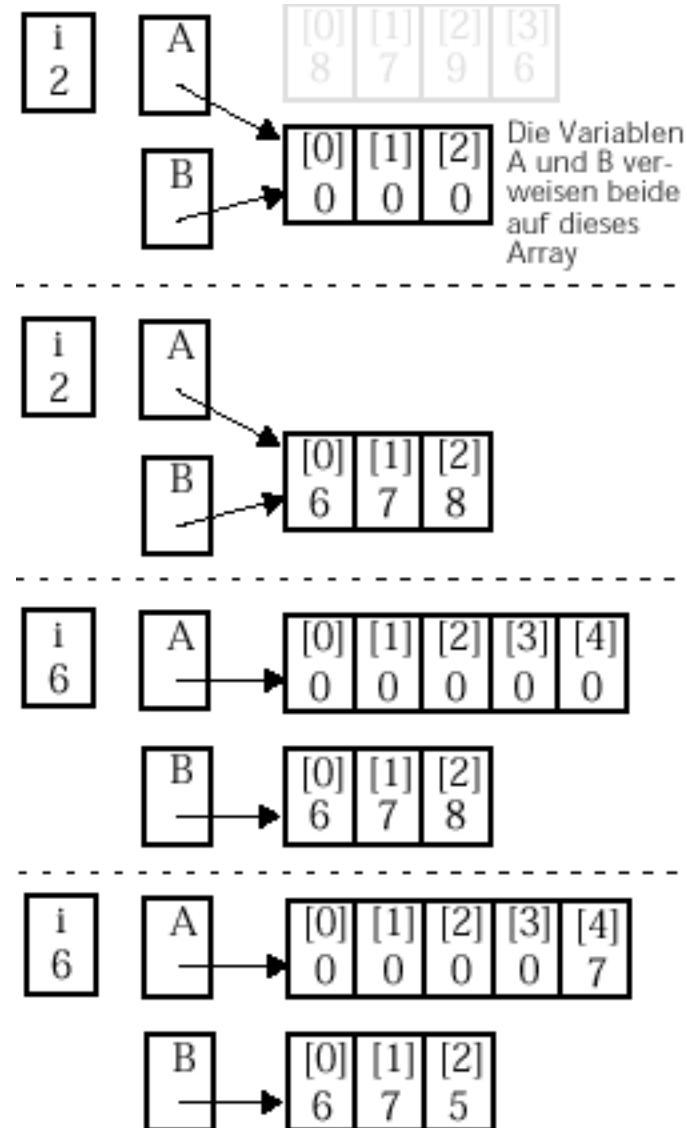
```
...  
A [0] = 8;      A [1] = 7;  
A [i] = 9;      A [3] = 6;  
  
A = new int [3];  
  
int [] B;  
B = A;
```



Echtle/Goedicke, Heidelberg: Abb. 2–19 (Ausschnitt), S. 73 © dpunkt 2000.

# Zuweisung an Array-Variablen: Beispiel 3

```
....  
B = A;  
A [0] = 6;  
B [1] = 7;  
B [2] = B [0] + 2;  
  
i = B [0];  
A = new int [5];  
  
A [i - 2] = B [1];  
B [i - 4] = A.length;
```



Echtle/Goedicke, Heidelberg: Abb. 2–19 (Ausschnitt), S. 73 © dpunkt 2000.

# Dynamische Größe von Arrays

Falls die Größe eines Arrays zum Zeitpunkt der Erstellung nicht bekannt ist:

- ▶ Die Größe könnte z.B. auch eingelesen werden.
- ▶ In Java kann durch `x.length` die Anzahl der Elemente dynamisch bestimmt werden:

```
int anzahl = scanner.nextInt();
int anfangswert = 0;

int[] vektor = new int[anzahl];

for (int i = 0; i < vektor.length; i++) {

    vektor[i] = anfangswert ;

}
```

- ❖ Beachte: Index läuft 0 ... `vektor.length -1`.

# Berücksichtigung von Typen

## Strenge Typsystem

- ▶ Für einzelne Elemente eines Arrays, die selbst keine Arrays sind, ist dies klar:

```
int[] a = new int[3];  
a[1] = 3;
```

- ▶ Für Arrays gilt bei Zuweisungen
  - ▶ Typ der Grundelemente und die Anzahl der Dimensionen müssen übereinstimmen:

```
int[] a;  
...  
a = b; // klappt nur, wenn b ebenfalls  
// 1-dimensionales int Array ist
```



# Arrays

Artikel im EINI-Wiki:

→ **Array**

→ **Zeichenkette**

## Kapitel 5

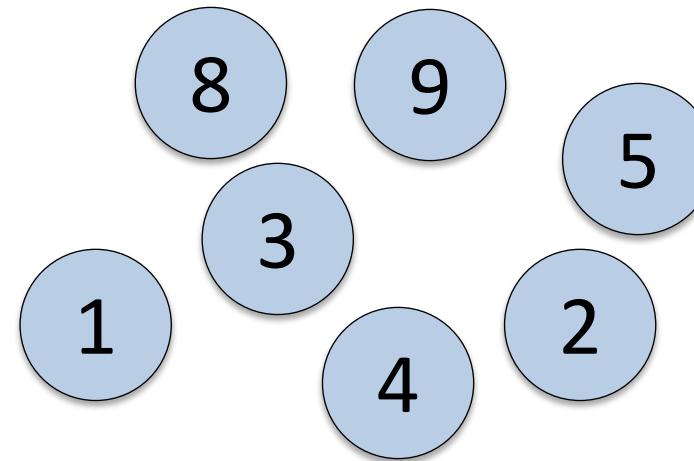
Algorithmen und  
Datenstrukturen

### In diesem Kapitel:

- Prolog
- **Arrays**
- Sortieren
- Rekursive  
Datenstrukturen

# Arrays: Internes Sortieren I

- Sortieren ist ein Standardproblem in der Informatik.



EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen

# Arrays: Internes Sortieren II

- ▶ Internes Sortieren bringt die Elemente einer Folge in die richtige Ordnung.
- ▶ Viele Alternativen bzgl. Sortieren sind entwickelt worden.
- ▶ Das einfache interne Sortieren (wie hier vorgestellt) hat zwar **geringen** Speicherplatzbedarf, aber eine **hohe** Laufzeit.
- ▶ Verfahren
  - ▶ Vertausche Elemente der Folge solange, bis sie in der richtigen Reihenfolge sind.
  - ▶ Hier wird als Speicherungsstruktur ein Array benutzt.

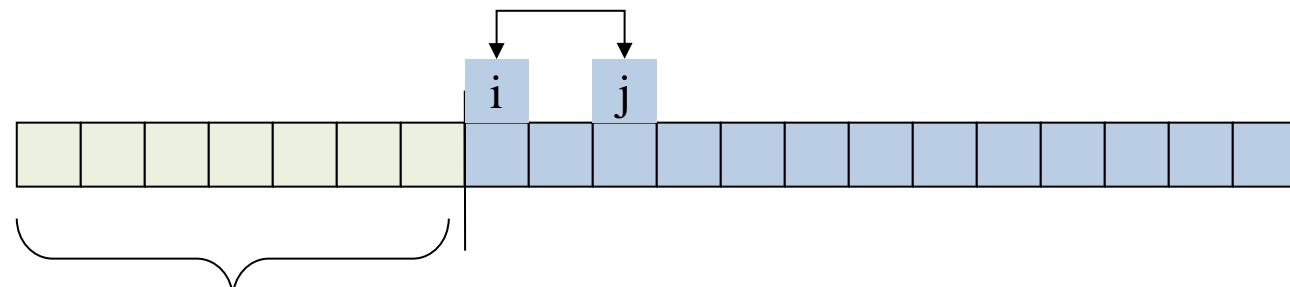
## In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive Datenstrukturen

# Sortierung

## Die Idee

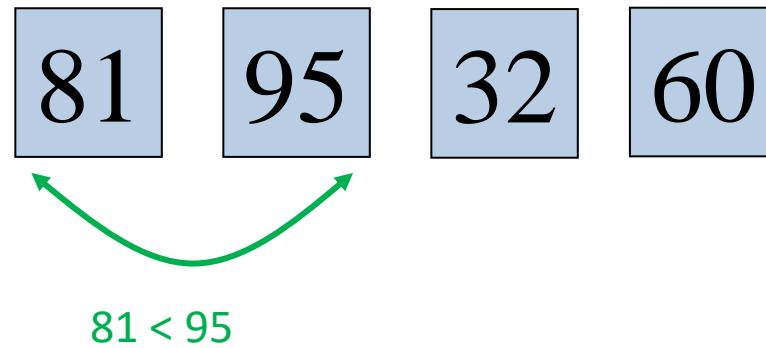
- ▶ Ausgangspunkt: Alles vor der Stelle  $i$  ist bereits sortiert.
- ▶ Man vergleicht das Element an der Stelle  $i$  mit allen weiteren Elementen (im Beispiel:  $j$ ).
- ▶ Falls das Element an der Stelle  $i$  größer ist als an der Stelle  $j$ : Vertausche die Elemente an den Stellen  $i$  und  $j$ .



bereits sortiert

# Sortierung: Beispiel I

Ausgangspunkt



EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen

bereits sortiert

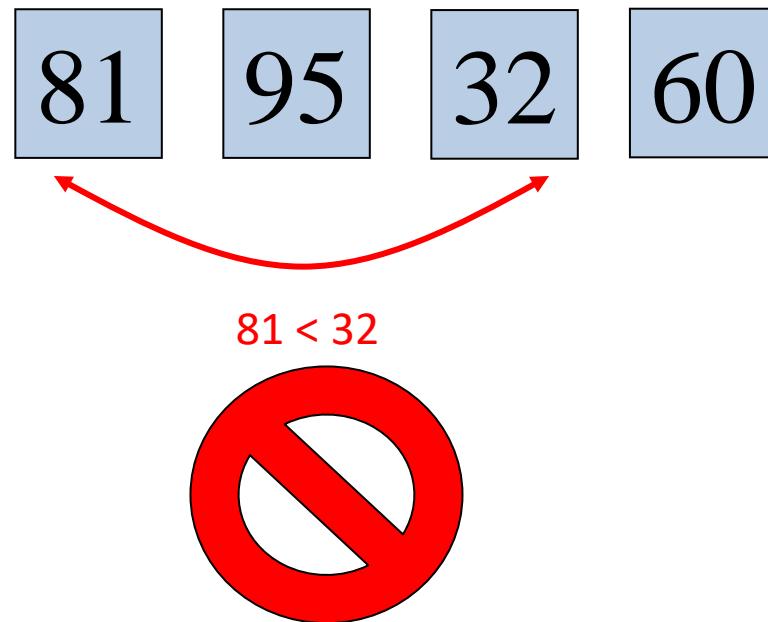
# Sortierung: Beispiel II

EINI LogWing /  
WiMa

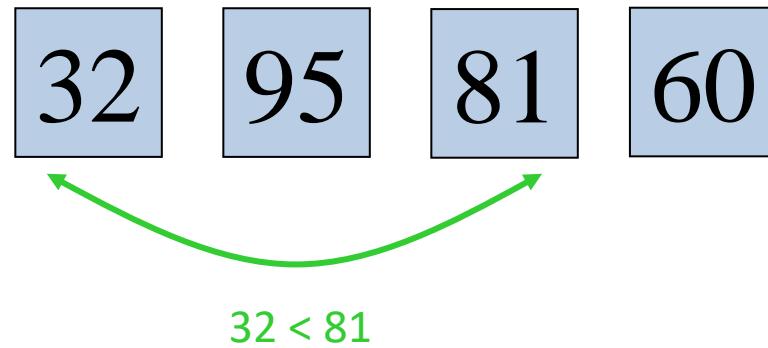
Kapitel 5  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen



# Sortierung: Beispiel III



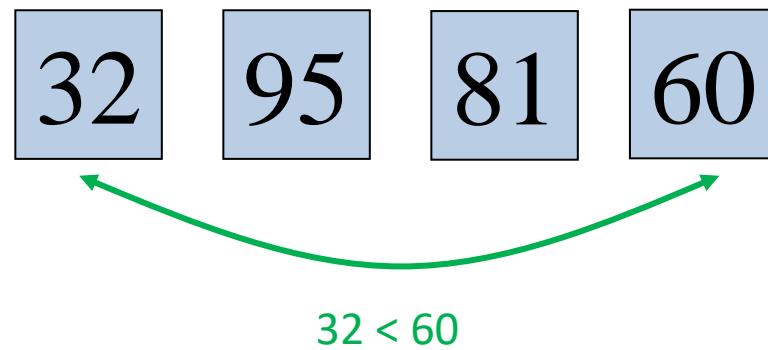
EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

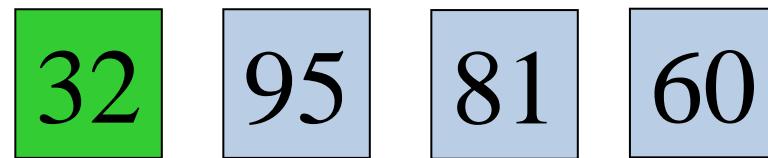
In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen

# Sortierung: Beispiel IV



# Sortierung: Beispiel V



EINI LogWing /  
WiMa

## Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

### In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen

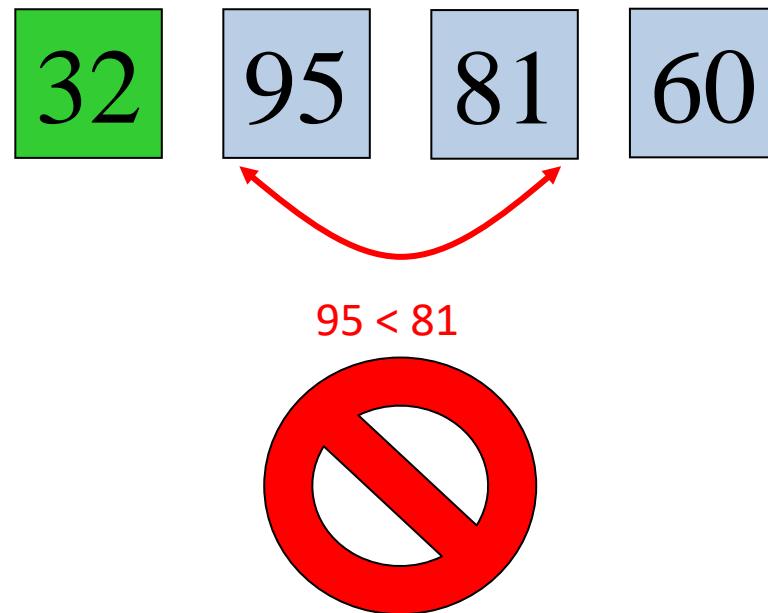
# Sortierung: Beispiel VI

EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen



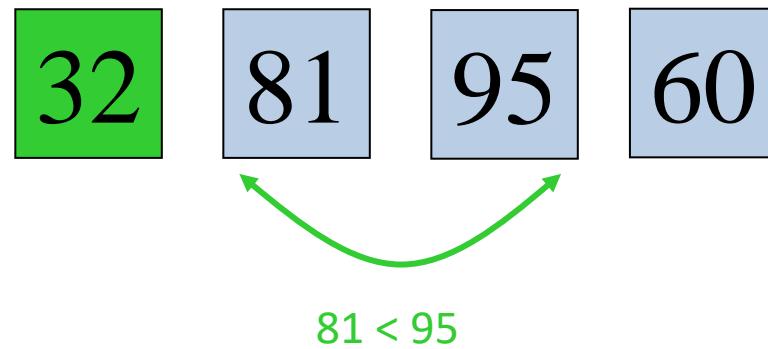
# Sortierung: Beispiel VII

EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen



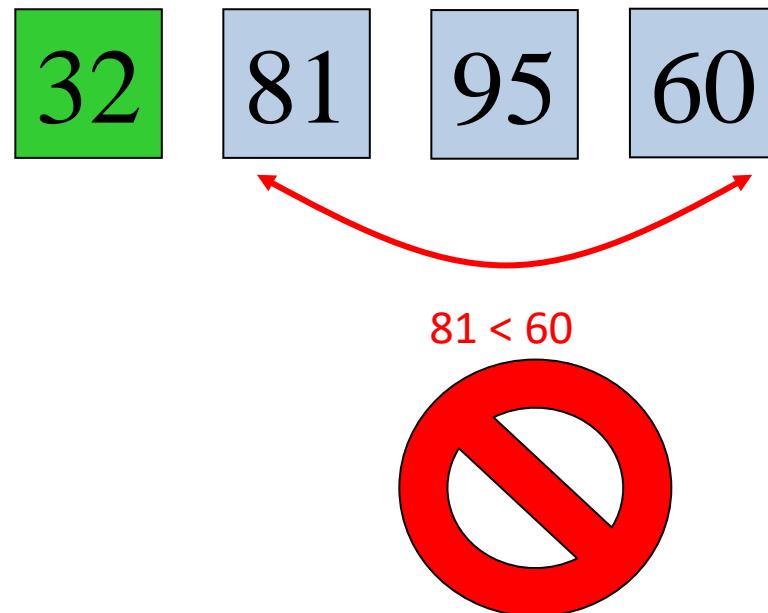
# Sortierung: Beispiel VIII

EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen



# Sortierung: Beispiel IX

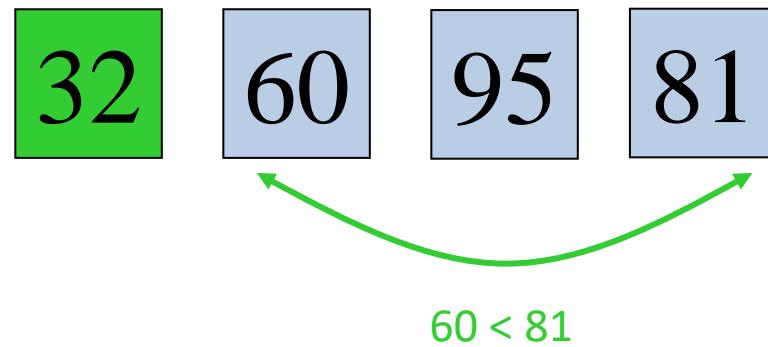
EINI LogWing /  
WiMa

## Kapitel 5

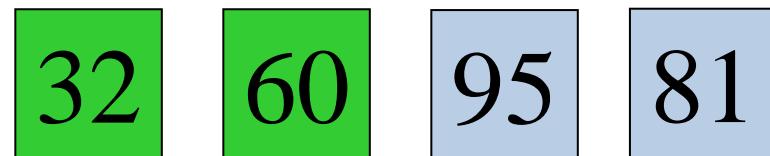
Algorithmen und  
Datenstrukturen

### In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen



# Sortierung: Beispiel X



EINI LogWing /  
WiMa

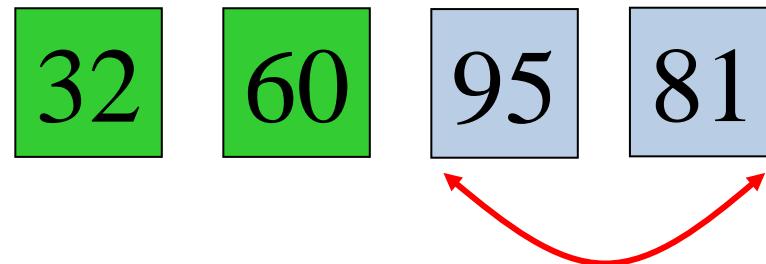
## Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

### In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen

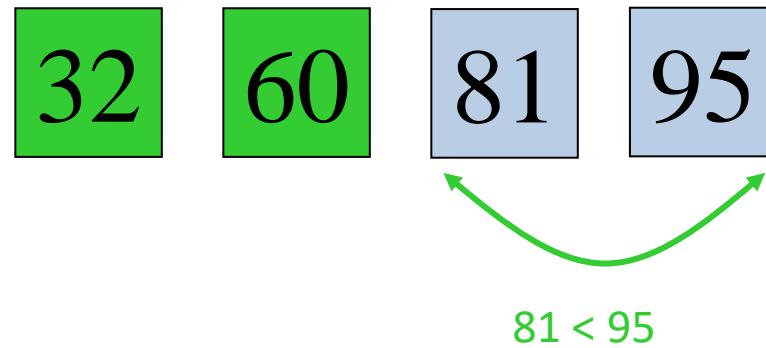
# Sortierung: Beispiel XI



$95 < 81$



# Sortierung: Beispiel XII



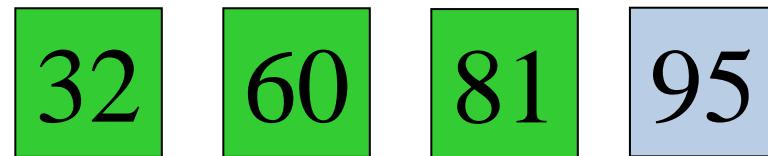
EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen

# Sortierung: Beispiel XIII



EINI LogWing /  
WiMa

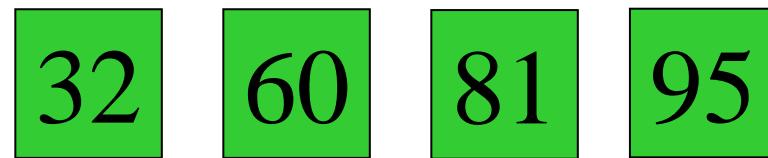
## Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

### In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen

# Sortierung: Beispiel XIV



EINI LogWing /  
WiMa

## Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

### In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen

# Einlesen der Werte

```
int n = scanner.nextInt();
int[] a = new int[n];

// Lies Elemente ein

for (int i = 0; i < n; i++) {
    a[i] = scanner.nextInt();

}
```

EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

## In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen

# Eigentliche Sortierung ...

Diese Schritte müssen für alle Elemente im Array erledigt werden

```
for (int i = 0; i < n - 1; i++) {  
  
    // Prüfe, ob a[i] Nachfolger hat,  
    // die kleiner als a[i] sind:  
    for (int j = i + 1; j < n; j++) {  
  
        if (a [i] > a [j]) { // Ist ein Nachfolger kleiner?  
  
            // Vertausche a[i] mit a[j]:  
            // Ringtausch mit Hilfsvariable z  
            int z = a [i];  
            a [i] = a [j];  
            a [j] = z;  
        }  
    }  
}
```

# Ausgabe

Zum Schluss wird noch alles ausgegeben

```
// Gib sortierte Elemente aus

System.out.println ("Sortierte Elemente:");
for (int i = 0; i < n; i++) {
    System.out.print (a [i] + ", ");
}
```

EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen

# Der Ablauf tabellarisch

EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen

i	j	a[0]	a[1]	a[2]	a[3]
0	1	81	95	32	60
0	2	81	95	32	60
		32	95	81	60
0	3	32	95	81	60
1	2	32	95	81	60
		32	81	95	60
1	3	32	81	95	60
		32	60	95	81
2	3	32	60	95	81
		<b>32</b>	<b>60</b>	<b>81</b>	<b>95</b>

# Gesamtes Programm

```
01 import java.util.Scanner;
02
03 public class A533 {
04     public static void main(String[] args) {
05         Scanner scanner = new Scanner(System.in);
06
07         int n = scanner.nextInt();
08         int[] a = new int[n];
09
10         for (int i = 0; i < n; i++) {
11             a[i] = scanner.nextInt();
12         }
13
14         for (int i = 0; i < n - 1; i++) {
15             for (int j = i + 1; j < n; j++) {
16                 if (a[i] > a[j]) {
17                     int z = a[i];
18                     a[i] = a[j];
19                     a[j] = z;
20                 }
21             }
22         }
23     }
24
25     System.out.println ("Sortierte Elemente:");
26     for (int i = 0; i < n; i++) {
27         System.out.print (a[i] + ", ");
28     }
29 }
30 }
```

# Alternativen?

- ▶ Könnte man die Algorithmusidee auch anders formulieren?
  - ▶ Finde Minimum x der aktuellen Menge.
  - ▶ Positioniere x an den Anfang.
  - ▶ Sortiere Restmenge nach Entfernen von x.
- ▶ Rekursive Formulierung ?
- ▶ Weitere Fragen
  - ▶ Terminierung?
  - ▶ Korrektheit?
  - ▶ Aufwand, Effizienz?



EINI LogWing /  
WiMa

## Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

### In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen

# Bemerkungen zum Aufwand I

Der Aufwand wird nach **Anzahl der Ausführungen von Elementaroperationen** betrachtet.

- ▶ Im Wesentlichen sind das beim Sortieren Vergleiche und Zuweisungen.
- ▶ Meist begnügt man sich mit einer vergröbernden Abschätzung, der sogenannten O-Notation.
- ▶ Diese Abschätzung wird in der Regel nach der Größe des Problems bestimmt, hier die Anzahl der zu sortierenden Elemente.

EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive Datenstrukturen

# Bemerkungen zum Aufwand II

- ▶ Obiges Sortierverfahren
  - ▶ **zwei** geschachtelte **for**-Schleifen,
  - ▶ die beide über das gesamte (Rest)Array der Größe n laufen.
  - ▶ Daher ist der Aufwand in der Größenordnung von  $n^2$ .

EINI LogWing /  
WiMa

## Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen



## In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen

# Bemerkungen zum Aufwand III

- ▶ Es stellt sich die folgende Frage
  - ▶ Ist es möglich, schnellere Algorithmen zu entwerfen, indem man die **Ermittlung des Maximums** beschleunigt?
- ▶ Antwort
  - ▶ **nein!**
  - ▶ Jeder Algorithmus, der mit Vergleichen zwischen Werten arbeitet, benötigt mindestens  $n - 1$  Vergleiche um das Maximum von  $n$  Werten zu finden.
- ▶ Beschleunigung also nicht beim Auffinden des Maximums möglich ...

EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen

# Sortieren: Standardproblem der Informatik I

- ▶ Einfach zu verstehende Aufgabenstellung
- ▶ Tritt regelmäßig auf.
- ▶ Grundproblem: **internes Sortieren**
  - ▶ Zu sortierende Menge liegt unsortiert im Speicher vor. Abhängig von der Datenstruktur zur Mengendarstellung kann (im Prinzip) auf jedes Element zugegriffen werden.
  - ▶ Es existieren viele Algorithmen, die nach Algorithmusidee, nach Speicherplatz und Laufzeit (Berechnungsaufwand) unterschieden werden.
  - ❖ Wir brauchen noch ein formales Gerüst, um Speicherplatz und Berechnungsaufwand zu charakterisieren!

EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen

# Sortieren: Standardproblem der Informatik II

- ▶ Varianten
  - ▶ **Externes Sortieren:** Daten liegen auf externem Speichermedium mit (sequentiell) Zugriff.
  - ▶ **Einfügen** in sortierte Menge
  - ▶ **Verschmelzen** von sortierten Mengen
  - ▶ ...
- ▶ Im Folgenden: Effiziente Alternative zum letzten (naiven) Algorithmus: **Heapsort**
- ▶ Verwendung rekursiver Datenstrukturen für rekursive Algorithmen

EINI LogWing /  
WiMa

## Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

### In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen



# Sortieren

Artikel im EINI-Wiki:

→ [Sortieren](#)

## Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

### In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- **Sortieren**
- Rekursive  
Datenstrukturen

# Rekursive Datenstrukturen

**Rekursion** ist nicht nur ein wichtiges Hilfsmittel für die Formulierung von Algorithmen, sondern auch für die Formulierung von **Datenstrukturen**.

EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

## In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- Sortieren
- **Rekursive  
Datenstrukturen**

# Idee vom Baum I

## Künstlerisch

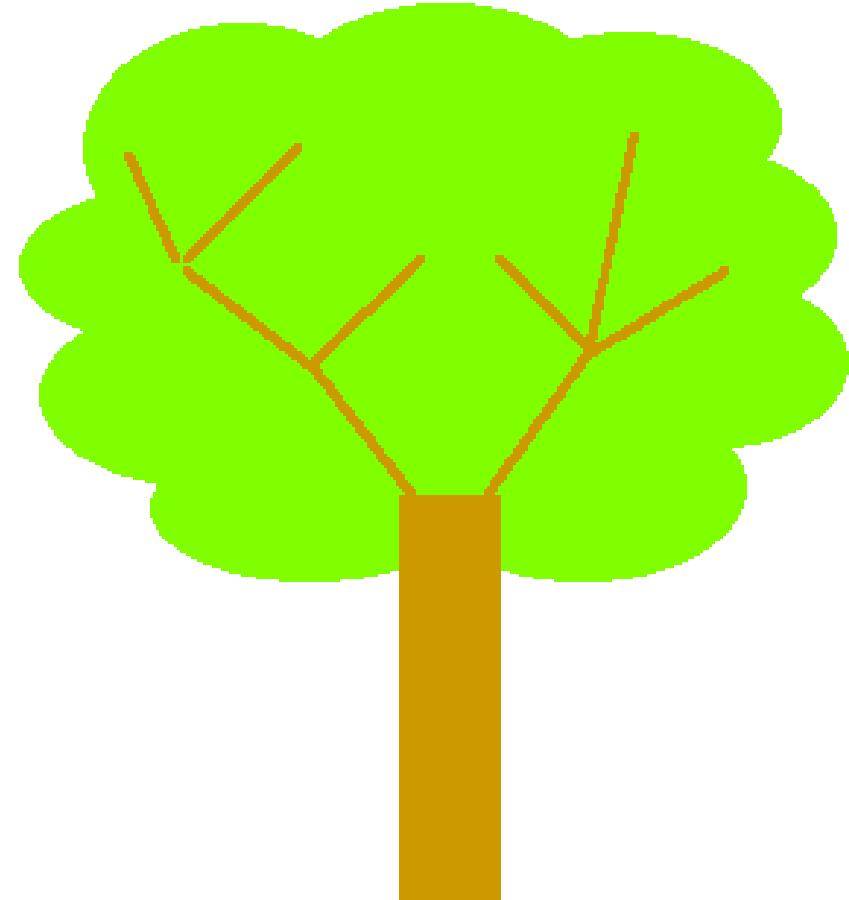
EINI LogWing /  
WiMa

### Kapitel 5

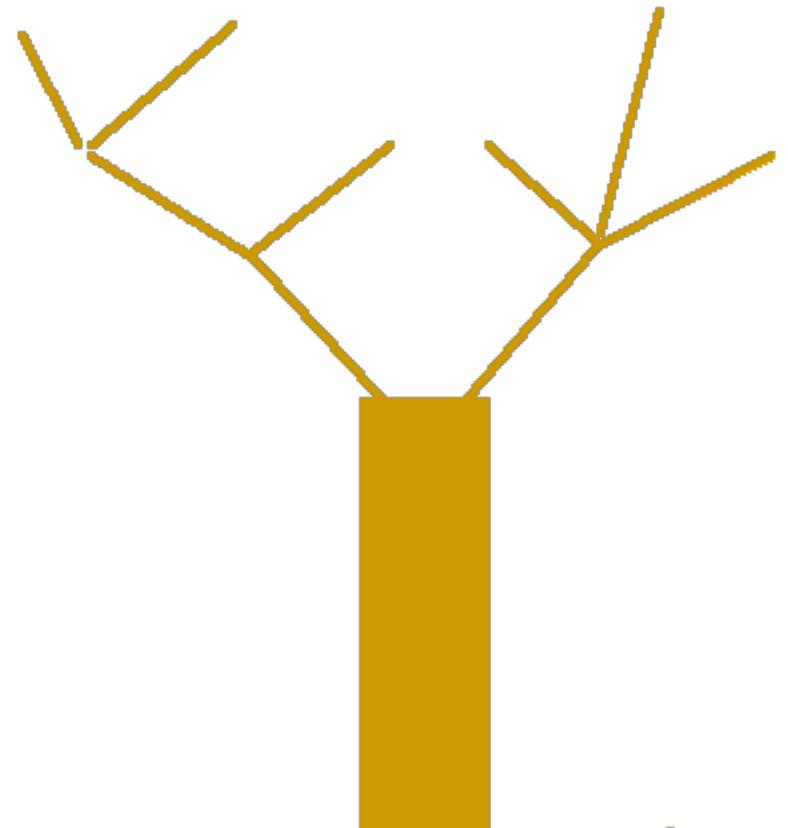
Algorithmen und  
Datenstrukturen

#### In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- Sortieren
- Rekursive  
Datenstrukturen



## Abstrahiert 1



EINI LogWing /  
WiMa

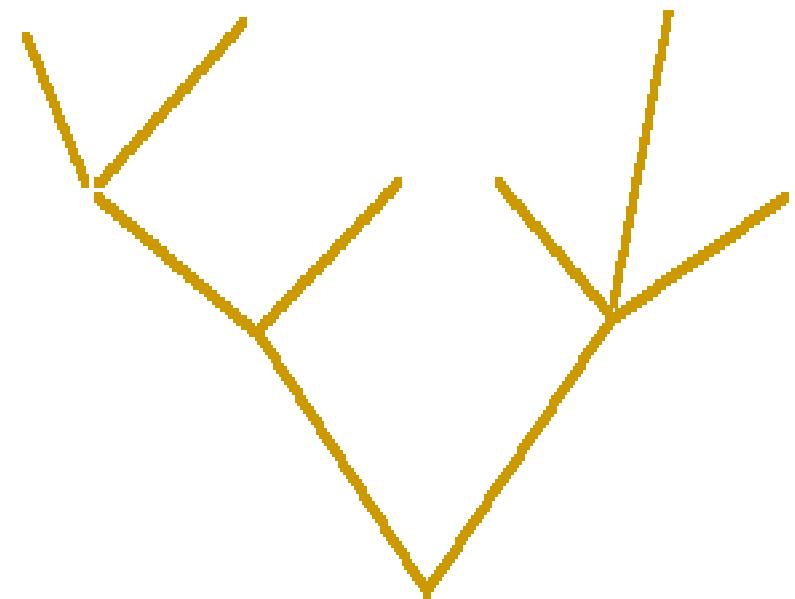
Kapitel 5  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

### In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- Sortieren
- **Rekursive  
Datenstrukturen**

# Idee vom Baum III

## Abstrahiert 2



EINI LogWing /  
WiMa

**Kapitel 5**  
Algorithmen und  
Datenstrukturen

**In diesem Kapitel:**

- Prolog
- Arrays
- Sortieren
- **Rekursive  
Datenstrukturen**

## Die Informatiksicht

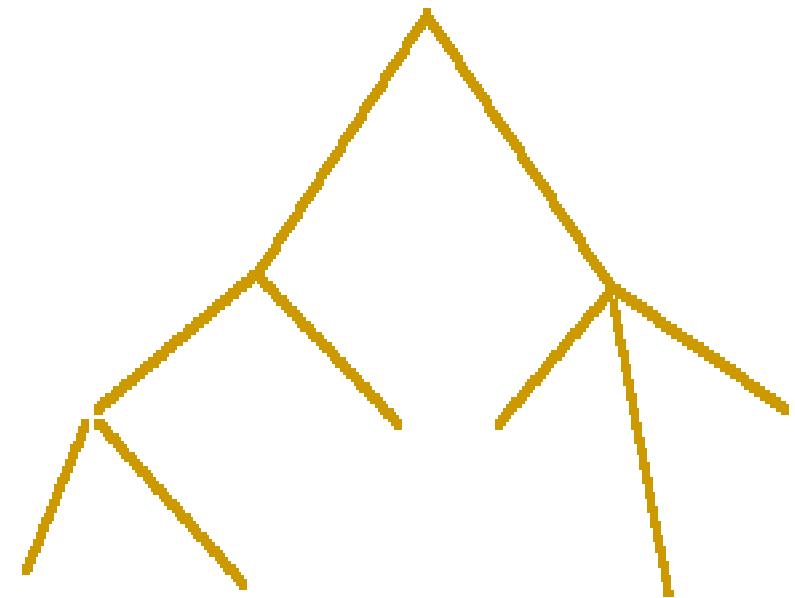
EINI LogWing /  
WiMa

### Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

#### In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- Sortieren
- Rekursive  
Datenstrukturen



# Binärer Baum I

## Definition: Binärer Baum

1. Der "leere" Baum  $\emptyset$  ist ein binärer Baum mit der Knotenmenge  $\emptyset$ .

2. Seien  $B_i$  binäre Bäume mit den Knotenmengen  $K_i$ ,  
 $i = 1, 2$ . Dann ist auch  $B = (w, B_1, B_2)$  ein binärer Baum  
mit der Knotenmenge

$$K = \{w\} \cup^* K_1 \cup^* K_2.$$

( $\cup^*$  bezeichnet disjunkte Vereinigung.)

3. Jeder binäre Baum  $B$  lässt sich durch endlich häufige Anwendung von 1.) oder 2.) erhalten.

# Binärer Baum II

Sprech- und Darstellungsweisen (siehe Punkt 2):

Sei  $B = (w, B_1, B_2)$  binärer Baum:

w heißt **Wurzel**,  $B_1$  linker und  $B_2$  rechter **Unterbaum**.

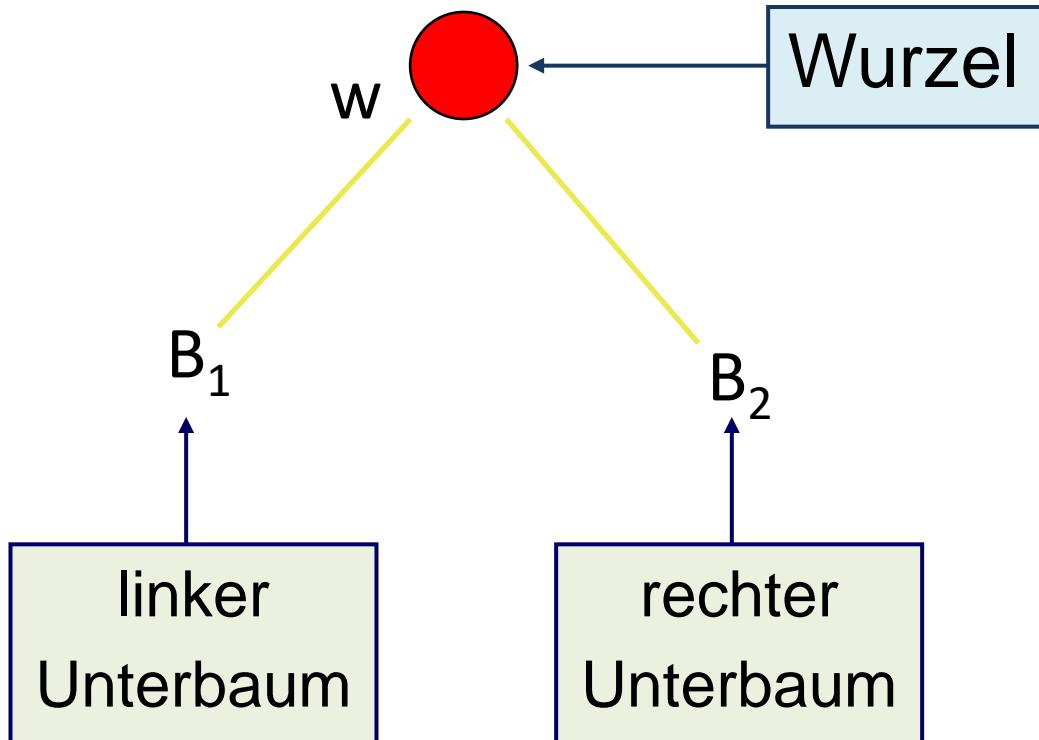
EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- Sortieren
- Rekursive  
Datenstrukturen



# Terminologie Binäre Bäume

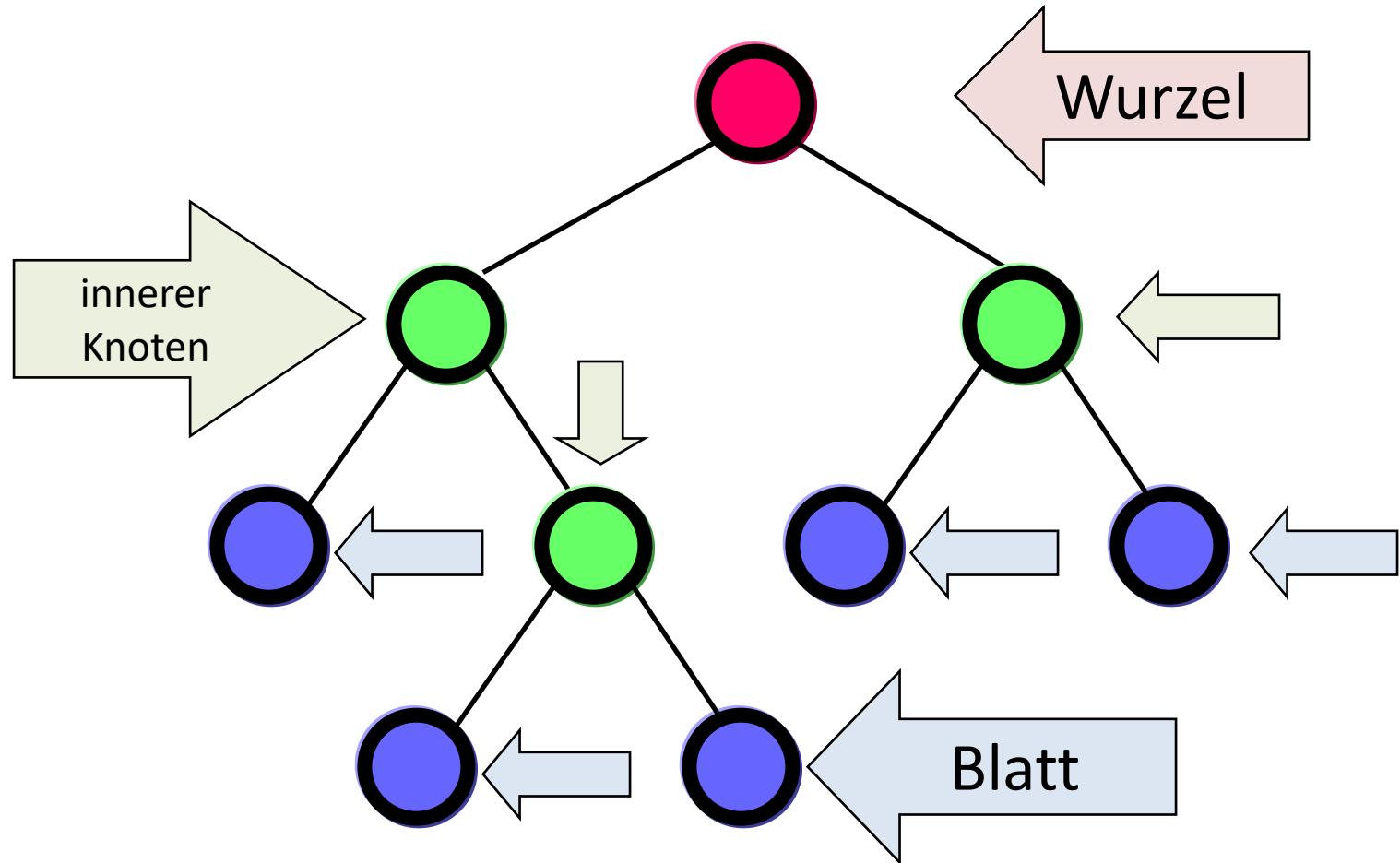
EINI LogWing /  
WiMa

Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- Sortieren
- Rekursive  
Datenstrukturen



# Knotenmarkierter binärer Baum

► **Definition:** Sei  $M$  eine Menge.

$(B, km)$  ist ein **knotenmarkierter binärer Baum**  
(mit Markierungen aus  $M$ )

$\Leftrightarrow$

1.  $B$  ist binärer Baum (mit Knotenmenge  $K = K(B)$ ).
2.  $km: K \rightarrow M$  Abbildung.  
(Markierung/Beschriftung der Knoten  $k \in K$  mit Elementen  $m \in M$ )

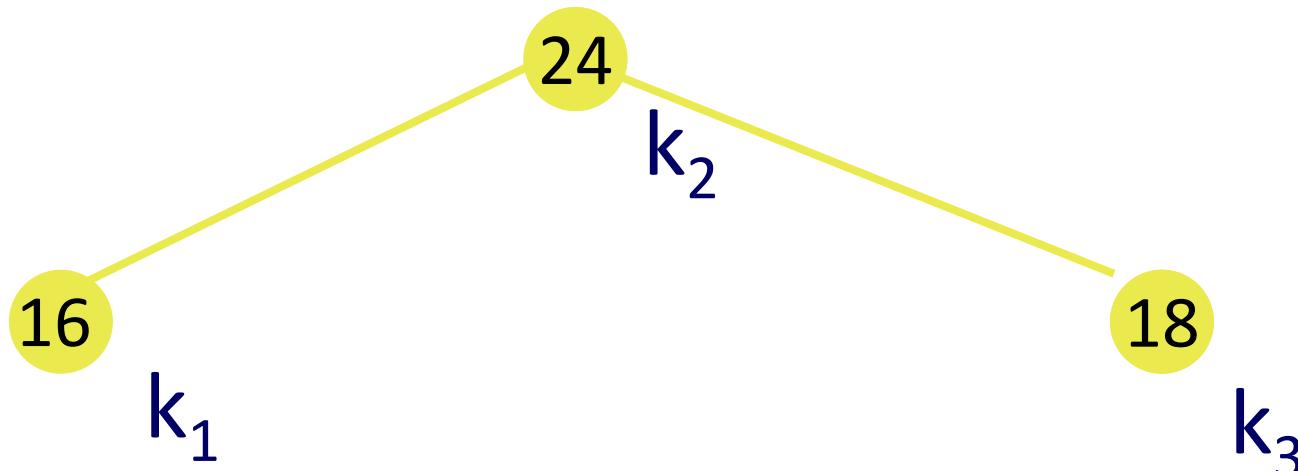
Jedem Knoten wird ein Element aus der Menge  $M$  zugeordnet.

Alternative: Markierung von Kanten.

# Knotenmarkierter binärer Baum

## Beispiel

- ▶  $M := \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} :=$  Menge der ganzen Zahlen
- ▶ Damit existiert auf  $M$  eine Ordnung!
- ▶ "Übliche" Darstellung der Knotenbeschriftung  $km$  durch "Anschreiben" der Beschriftung an/in die Knoten.



# Definition: Heap

- ▶ Ein **Heap** (Haufen) ist ein knotenmarkierter binärer Baum, für den gilt:
  - ▶ Die Markierungsmenge ist geordnet.
  - ▶ Der binäre Baum ist links-vollständig.
  - ▶ Die Knotenmarkierung der Wurzel ist kleiner oder gleich der Markierung des linken bzw. rechten Sohnes (sofern vorhanden).
  - ▶ Die Unterbäume der Wurzel sind Heaps.
- ▶ An der Wurzel steht das kleinste (eines der kleinsten) Element(e).

# Beispiel: Heap

- ▶ Binärbaum
- ▶ Alle Ebenen, bis auf letzte, vollständig gefüllt
- ▶ Links-vollständig gefüllt
- ▶ Knotenmarkierung der Wurzel kleiner als die der Kinder

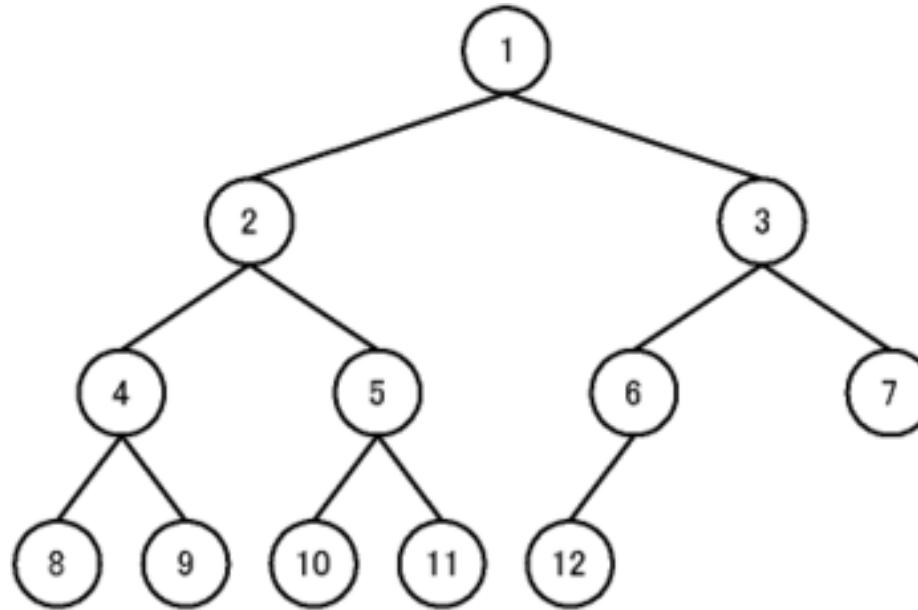
EINI LogWing /  
WiMa

## Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

### In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- Sortieren
- Rekursive  
Datenstrukturen





# Rekursive Datenstrukturen

Artikel im EINI-Wiki:

- **Baum**
- **Heap**

## Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

### In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- Sortieren
- **Rekursive  
Datenstrukturen**

## Begriffe

- ✓ Spezifikationen, Algorithmen, formale Sprachen
- ✓ Programmiersprachenkonzepte
- ✓ Grundlagen der imperativen Programmierung

EINI LogWing /  
WiMa

## Kapitel 5

Algorithmen und  
Datenstrukturen

### In diesem Kapitel:

- Prolog
- Arrays
- Sortieren
- Rekursive  
Datenstrukturen

- Algorithmen und Datenstrukturen
  - ✓ Felder
  - ✓ Sortieren
  - ✓ Rekursive Datenstrukturen (Baum, binärer Baum, Heap)
  - Heapsort
- Objektorientierung
  - Einführung
  - Vererbung
  - Anwendung



**Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!**

## Nächste Termine

- ▶ Nächste Vorlesung – WiMa 11.12.2025, 08:15
- ▶ Nächste Vorlesung – LogWing 12.12.2025, 08:15